DS n°2 : Calcul, complexes – Corrigé

Noté sur 115 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est divisée par 5 pour faire une note sur 20.

Exercice 1 : Inéquation à paramètre (17 pts)

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_m) \quad : \quad \sqrt{x^2+mx+4} < x+1$$

1) (4 pts) Déterminer selon les valeurs de m, le domaine de définition (ou d'existence) de (E_m).

L'équation a un sens si et seulement si $x^2+mx+4 \geq 0$. Ce polynôme a pour discriminant

$$\Delta = m^2 - 16$$

- Si $m \in [-4,4]$, alors $\Delta \leq 0$ donc le polynôme est de signe constant, celui de x^2 : il et donc positif et le domaine de définition de (E_m) est $\boxed{\mathbb{R}}$.
- Si $m \in]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[$, alors $\Delta > 0$: le polynôme admet deux racines

$$x_1 = \frac{-m-\sqrt{m^2-16}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-m+\sqrt{m^2-16}}{2}$$

Le polynôme est alors positif si et seulement si $x \in \boxed{]-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty[}$ qui est donc le domaine d'existence de (E_m).

2) (5 pts) Résoudre (E_m) dans le cas $m = -4$.

Par la question précédente, (E_4) est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4x+4} < x+1 &\iff \sqrt{(x-2)^2} < x+1 \\ &\iff |x-2| < x+1\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- Si $x \geq 2$, alors $x-2 \geq 0$ et cette équation devient

$$x-2 < x+1 \iff -2 < 1$$

si bien que dans ce cas, les solutions sont $\mathcal{S}_1 := [2,+\infty[$.

- Si $x < 2$, alors cette équation devient

$$-x+2 < x+1 \iff 1 < 2x \iff \frac{1}{2} < x$$

Or, comme $x < 2$, dans ce cas les solutions sont $\mathcal{S}_2 := \left]\frac{1}{2},2\right[$.

Finalement

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left]\frac{1}{2},+\infty\right[}$$

3) (8 pts) Résoudre (E_m) dans le cas $m = 5$.

En reprenant les notations de la question 1, on a :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{-5-3}{2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{-5+3}{2} = -1 \end{cases}$$

Ainsi, l'équation n'a de sens que pour $x \in]-\infty,-4]\cup[-1,+\infty[$. Pour un tel x, l'équation s'écrit

$$\sqrt{x^2+5x+4} < x+1$$

On constate que si $x < -1$, alors $x+1 < 0$ et il n'y a donc pas de solution. On considère donc $x \geq -1$ par la suite. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+5x+4} < x+1 &\iff x^2+5x+4 < (x+1)^2 \\ &\iff x^2+5x+4 < x^2+2x+1 \\ &\iff 3x < -3 \\ &\iff x < -1\end{aligned}$$

Or, cette dernière assertion est fausse car $x \geq -1$. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

Problème 1 : Méthode de Cardan (version complexe) (33 pts + 15 bonus, q. 9)

On considère deux complexes non nuls p et q, ainsi que l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E): \qquad z^3 + pz + q = 0$$

On considère aussi l'équation (P) suivante d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(P): \qquad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Soit U, V les racines complexes de (P). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1) (2 pts) Déterminer UV et $U + V$.

Comme U, V sont les racines de $Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27}$, on a

$$\boxed{UV = -\frac{p^3}{27}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{U + V = -q}$$

2) (3 pts) Dans cette question uniquement, on suppose $U = 2 + 2i$. Déterminer toutes les valeurs possibles de u.

$U = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, les racines cubiques de U sont

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}}$$

3) (3 pts) Montrer que $u \neq 0$. Dans la suite du problème, on pose $v = \frac{-p}{3u}$.

Supposons par l'absurde que $u = 0$. Alors $U = u^3 = 0$. Ainsi,

$$UV = -\frac{p^3}{27} = 0$$

donc $p = 0$, ce qui est une contradiction. Finalement, $\boxed{u \neq 0}$.

4) (2 pts) Calculer u^3v^3. En déduire que $v^3 = V$.

On a

$$u^3v^3 = u^3\left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} = UV$$

Comme $U = u^3 \neq 0$, on peut diviser par u^3 : on obtient $\boxed{v^3 = V}$.

5) (1 pt) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

Par la question 1 et la question 3, on a $u^3 + v^3 = U + V = \boxed{-q}$

6) (4 pts) Montrer que $u + v$ est solution de (E).

On vérifie immédiatement :

$$\begin{aligned}
&(u+v)^3 + p(u+v) + q \\
&= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q \\
&= U + V + 3uv(u+v) + p(u+v) + q \\
&= -q + (3uv + p)(u+v) + q \\
&= \left(3u \times \left(-\frac{p}{3u}\right) + p\right)(u+v) \\
&= 0 \times (u+v) = 0
\end{aligned}$$

Finalement, $u + v$ est solution de (E).

7) (8 pts) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont aussi solutions de (E).

Montrons que $ju + j^2v$ est une solution de (E). Comme $j^3 = e^{2i\pi} = 1$, on a

$$\begin{aligned}
&(ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q \\
&= (ju)^3 + 3(ju)^2j^2v + 3ju(j^2v)^2 + (j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q \\
&= j^3u^3 + 3j^4u^2v + 3j^5uv^2 + j^6v^3 + p(ju + j^2v) + q \\
&= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\
&= U + V + 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) + q \\
&= -q + (3uv + p)(ju + j^2v) + q \\
&= 0 \times (ju + j^2v) = 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat. Montrons maintenant que $j^2u + jv$ est une solution de (E).

$$\begin{aligned}&(j^2u+jv)^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=(j^2u)^3+3(j^2u)^2jv+3j^2u(jv)^2+(jv)^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=j^6u^3+3j^5u^2v+3j^4uv^2+j^3v^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=u^3+3j^2u^2v+3juv^2+v^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=U+V+3uv(j^2u+jv)+p(j^2u+jv)+q\\
&=-q+(3uv+p)(j^2u+jv)+q\\
&=0\times(j^2u+jv)=0\end{aligned}$$

Finalement, j^2u+jv est une solution de (E).

8) Application 1 : on prend $p=-3$ et $q=1$.

a) **(4 pts)** Calculer U, V puis u et v.

U et V sont les racines de

$$Z^2+1\times Z-\frac{(-3)^3}{27}=Z^2+Z+1$$

Ainsi, on peut prendre par exemple $\boxed{U=j}$ et $\boxed{V=j^2}$. Comme u est une racine cubique de $U=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on peut par exemple prendre

$$\boxed{u=e^{\frac{2i\pi}{9}}}$$

Pour cette valeur de u, on a alors

$$v=\frac{-p}{3u}=-\frac{1}{u}=\boxed{e^{-\frac{2i\pi}{9}}}$$

b) **(6 pts)** En déduire les solutions de $z^3-3z+1=0$.

Par les questions précédentes, on a donc 3 racines de z^3-3z+1 :

$$z_1=u+v=e^{\frac{2i\pi}{9}}+e^{-\frac{2i\pi}{9}}=\boxed{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}$$

Pour z_2, on remarque que $v=\overline{u}$ et $j^2=\overline{j}$, si bien que

$$\begin{aligned}z_2&=ju+j^2v=ju+\overline{ju}=2\mathrm{Re}(ju)\\
&=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{2i\pi}{9}}\right)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{8i\pi}{9}}\right)\\
&=\boxed{2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)}\end{aligned}$$

Pour z_3, on remarque que $jv=\overline{j^2u}$, si bien que

$$\begin{aligned}z_3&=j^2u+jv=j^2u+\overline{j^2u}=2\mathrm{Re}(j^2u)\\
&=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{4i\pi}{3}}e^{\frac{2i\pi}{9}}\right)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{14i\pi}{9}}\right)\\
&=\boxed{2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)}\end{aligned}$$

9) Application 2 : on cherche les solutions de l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{C}$

$$(EQ):\qquad x^3+(6+3i)x^2+(6+12i)x-3+8i=0$$

a) **(8 pts)** On pose $z=x+a$ avec $a\in\mathbb{C}$. Trouver a tel que z vérifie une équation du type $z^3+pz+q=0$. Déterminer p et q.

Avec $x=z-a$, on a

$$\begin{aligned}0=&x^3+(6+3i)x^2+(6+12i)x-3+8i\\
=&(z-a)^3+(6+3i)(z-a)^2+(6+12i)(z-a)-3+8i\\
=&z^3-3az^2+3a^2z-a^3+(6+3i)(z^2-2az+a^2)\\
&+(6+12i)(z-a)-3+8i\\
=&z^3+(-3a+6+3i)\,z^2+\left(3a^2-12a-6ai+6+12i\right)z\\
&-a^3+(6+3i)a^2-a(6+12i)-3+8i\end{aligned}$$

Le coefficient en z^2 s'annule si et seulement si

$$-3a+6+3i=0\iff -a+2+i=0\iff \boxed{a=2+i}$$

Pour cette valeur de a, on a donc

$$z^3+pz+q=0$$

avec

$$\begin{aligned} p &= 3a^2 - 12a - 6ai + 6 + 12i \\ &= 3\left[(2+i)^2 - 4(2+i) - 2(2+i)i + 2 + 4i\right] \\ &= 3\left[4 + 4i - 1 - 8 - 4i - 4i - 2i^2 + 2 + 4i\right] \\ &= 3\left[4 - 1 - 8 + 4\right] \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= -a^3 + (6+3i)a^2 - a(6+12i) - 3 + 8i \\ &= -(2+i)^3 + 3(2+i)(2+i)^2 - 6(2+i)(1+2i) - 3 + 8i \\ &= 2(2+i)^3 - 6(2 + 4i + i - 2) - 3 + 8i \\ &= 2\left(8 + 3\times 4i + 3\times 2i^2 + i^3\right) - 6\times 5i - 3 + 8i \\ &= 2\left(2 + 12i - i\right) - 3 - 22i \\ &= 4 + 22i - 3 - 22i \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

b) (7 pts) Résoudre (EQ).

On cherche les racines de $z^3 + pz + q$ avec $p = 3$ et $q = 1$. On cherche donc les racines du polynôme $z^3 - 3z + 1 = 0$. Or, par la question 8.b), ces racines sont :

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \qquad z_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \qquad z_3 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

Or, par la question 9.a), pour tout $x \in \mathbb{C}$, x est solution de (EQ) si et seulement si $x + a$ est racine de $z^3 - 3z + 1 = 0$. Ainsi, les solutions de (EQ) sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - a,\quad 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) - a,\quad 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) - a\right\}}$$

Exercice 2 : un peu de trigonométrie (17 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(2kx) \qquad \text{et} \qquad C(x) = \sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$$

1) (3 pts) Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Donner la formule trigonométrique de $\sin p \sin q$.

(On sait qu'il faut utiliser les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ car le cosinus "ne mélange pas" et on a $\sin p \sin q$)

$$\boxed{\sin p \sin q = \frac{\cos(p-q) - \cos(p+q)}{2}}$$

2) (5 pts) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$.

$$\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{2ix})^k$$

- Si $x \equiv 0\,[\pi]$, alors $e^{2ix} = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \boxed{n+1}$.
- Si $x \not\equiv 0\,[\pi]$, alors $e^{2ix} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} &= \frac{1 - (e^{2ix})^{n+1}}{1 - e^{2ix}} \\ &= \frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x}\left(e^{-i(n+1)x} - e^{i(n+1)x}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x}\left(-2i\sin((n+1)x)\right)}{e^{ix}\left(-2i\sin x\right)} \\ &= \boxed{e^{inx}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}} \end{aligned}$$

3) **(4 pts)** En déduire $S(x)$. On simplifiera le résultat en utilisant la question 1.

On a

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(2kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{2ikx}) = \mathrm{Im} \sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$$

- Si $x \equiv 0\,[\pi]$, alors $S(x) = \mathrm{Im}(n+1) = \boxed{0}$.
- Si $x \not\equiv 0\,[\pi]$, alors

$$\begin{aligned} S(x) &= \mathrm{Im}\left(e^{inx}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}\right) \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}\sin(nx) \\ &= \frac{\cos((n+1)x - nx) - \cos((n+1)x + nx)}{2\sin x} \\ &= \boxed{\frac{\cos x - \cos((2n+1)x)}{2\sin x}} \end{aligned}$$

4) **(5 pts)** Exprimer $C(x)$ en fonction de $S(x)$ ou de ses dérivées. On ne fera pas le calcul explicite.

On a

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n} 2k\cos(2kx) = 2\sum_{k=0}^{n} k\cos(2kx) = 2C(2x)$$

On en déduit que

$$\boxed{C(x) = \frac{1}{2}S'\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Problème 2 : Sommes de Newton (33 pts)

Pour tout cet exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On pose également

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

1) **(3 pts)** Donner la valeur de $S_{n,0}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.

$$S_{n,0} = \sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$
$$S_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) **(2 pts)** Exprimer $S_{n+1,p+1} - S_{n,p+1}$ en fonction de n et p.

$$S_{n+1,p+1} - S_{n,p+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \boxed{(n+1)^{p+1}}$$

On suppose dans le reste du problème que $p \in \mathbb{N}^*$.

3) **(7 pts)** Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - n$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_{n,i} &= \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i \\ &= \sum_{i=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n} \binom{p+1}{i} k^i \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^i \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^i - 1\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - 1\right] \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - n} \end{aligned}$$

4) (9 pts) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i}S_{n,i}=(n+1)^{p+1}-(n+1)$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p+1}\binom{p+1}{i}S_{n,i}&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1}-n\\&=\sum_{k=2}^{n+1}k^{p+1}-n\\&=\sum_{k=1}^{n+1}k^{p+1}-1-n\\&=S_{n+1,p+1}-1-n\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_{n,p+1}+\sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i}S_{n,i}=S_{n+1,p+1}-1-n$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i}S_{n,i}&=S_{n+1,p+1}-S_{n,p+1}-1-n\\&=\boxed{(n+1)^{p+1}-(n+1)}\qquad\text{par la question 2}\end{aligned}$$

5) (6 pts) En utilisant la question précédente, exprimer $S_{n,p}$ en fonction de $S_{n,1},\cdots,S_{n,p-1}$ (ainsi que n et p).

On remarque que

$$\sum_{i=1}^{p}\binom{p+1}{i}S_{n,i}=(p+1)S_{n,p}+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i}S_{n,i}$$

Donc, par ce qui précède,

$$(p+1)S_{n,p}+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i}S_{n,i}=(n+1)^{p+1}-(n+1)$$

si bien que

$$(p+1)S_{n,p}=(n+1)^{p+1}-(n+1)-\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i}S_{n,i}$$

Finalement

$$S_{n,p}=\frac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1}-(n+1)-\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i}S_{n,i}\right]$$

6) (6 pts) Déterminer $S_{n,3}$.

En prenant $p=3$ dans la formule obtenue à la question précédente, on a

$$\begin{aligned}S_{n,3}&=\frac{1}{3+1}\left[(n+1)^4-(n+1)-\sum_{i=1}^{2}\binom{4}{i}S_{n,i}\right]\\&=\frac{1}{4}\left[(n+1)^4-(n+1)-4S_{n,1}-6S_{n,2}\right]\\&=\frac{1}{4}\left[(n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)\right]\\&=\frac{1}{4}(n+1)\left[(n+1)^3-1-2n-n(2n+1)\right]\\&=\frac{1}{4}(n+1)\left[n^3+3n^2+3n\cancel{+1-1}-2n-n(2n+1)\right]\\&=\frac{1}{4}n(n+1)\left[n^2+3n+3-2-(2n+1)\right]\\&=\frac{1}{4}n(n+1)\left[n^2+n\right]\\&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$